

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 3

Voordrachten over toegepaste wiskunde.

C.Campagne, P.Wolff, R.Timman.



1947

Inhoudsopgave

Voordrachten over toegepaste wiskunde

Dr. C. Campagne	Wiskundige theorie van de bedrijfs- reserve en het eigenbehoud in de brandverzekering	7 pag
Drs. P. de Wolff	Wiskundige problemen bij het econo- misch steekproefonderzoek	4 "
Dr. R. Timman	Mathematische problemen uit de theorie der laminaire grenslaag- stroming	21 "

VOORDRACHT TE HOUDEN DOOR Dr. C. CARLSSON:

WISKUNDIGE THEORIE VAN DE BEDRIJFSRESERVE EN HET EIGENBEMOED IN DE BRAND-
VERZEKERING.

Bedrijfsreserve per groep van gelijksoortige risico's. Uitgaande van de
individuele risico's.

N = aantal verzekerde eenheden

$\psi(w)$ = verdelingsfunctie van de verzekerde kapitalen w

$$\int_0^\infty \psi(w) dw = 1$$

P_1 = uitbrekingswaarschijnlijkheid = kans op brand per eenheid per
jaar

$P_2(\lambda)$ = uitbreidingswaarschijnlijkheid = kans dat bij brand de schade
 λ % van het verzekerde kapitaal uitmaakt

$$\int_0^1 P_2(\lambda) d\lambda = 1.$$

$\phi(x, dx)$ = kans dat ingeval van één brand de schade gelegen is tussen x en
 $x + dx$.

$\phi_1(X)$ = kans, dat ingeval van één brand de schade $\leq X$

$\phi_k(X)$ = kans, dat ingeval van k branden de schade $\leq X$

$\pi_i(P_2^{(k)})$ = verdelingsfunctie van de uitbrekingswaarschijnlijkheid

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(P_2^{(k)}) = 1$$

$v(k)$ = kans op k branden in één jaar

$$v(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(P_2^{(k)}) \frac{e^{-NP_1^{(k)}} (NP_1^{(k)})^k}{k!} \quad (\text{Poisson})$$

$W(X) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \phi_k(X)$ = kans, dat in één jaar bij N

verzekerings-eenheden de totale schade

$$\leq X$$

$$W(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i(P_2^{(k)}) e^{-NP_1^{(k)}} (NP_1^{(k)})^k}{k!} \right]$$

$$\left[\int_0^X \psi(w) \left(\int_0^{X-w} \phi_1(t) \right) \left(\int_0^{X-w-t} \phi_1(t) \right) \dots \left(\int_0^{X-w-t-\dots} \phi_1(t) \right) dt \dots \right]$$

$$= \int_0^X \psi(w) P_2\left(\frac{X-w}{w}\right) dw$$

$$\frac{d^2 W(X)}{dX^2} = -\psi(X)$$

$$\bar{X} = \text{risicopremie} = \int_0^\infty X \omega_1(X) dX$$

Correctie S_N

Formule van Eggenbergen.

$$\omega_z = \frac{1}{z!} h (h+d) (h+2d) \dots \{ h + (z-1)d \} (1+d)^{-\frac{h}{d} - z}$$

$h = Np$; $d =$ verandering van h in % van h .

$z =$ werkelijk aantal voorgekomen branden

$\omega_z =$ kans op z branden

$$\text{I} \quad \sum_0^{\infty} \omega_z = \frac{99}{100} \quad \text{II} \quad \sum_0^{\infty} z \omega_z = \frac{999}{1000}$$

dan is de bedrijfsreserve per eenheid van verzekerd kapitaal bij kans

$$\frac{99}{100} \rightarrow z, - h \quad \text{bij kans } \frac{999}{1000} \rightarrow z, - h$$

Stel $z, - h = R_{h,d}$

$$\frac{R_{h,d}}{R_{h,0}} = R_{h,\frac{d}{10}} = a h + b \quad \text{waarbij } a = 0,00; b = 1,11 \quad \text{bij kans } \frac{99}{100}$$

$$\text{en } a = 0,044; b = 1,14 \quad \text{" " } \frac{999}{1000}$$

$$R_{h,d} = R_{h,0} + \frac{d}{10} \{ R_{h,\frac{d}{10}} - R_{h,0} \}$$

$$R_{h,d} = R_{h,0} \left\{ 1 + \frac{d}{10} \{ a h + b - 1 \} \right\}$$

De gecorrigeerde bedrijfsreserve wordt

$$R = Q \sum_{z=0}^{\infty} S_z \tau(z) + \frac{d}{10} (b-1 - a Np) \frac{1}{2} (a + \frac{1}{2} Np)$$

Correctie Q (Q^2 getal van Lexis)

$$Q = \frac{\mu_p}{\mu_z}$$

$$\mu_p = \sqrt{\frac{N[\sum x_i^2] - [\sum x_i]^2}{N(N-1)}}$$

$N =$ aantal waarnemingsjaren

$$x_i = \frac{\text{schade } i^{\text{te}} \text{ jaar}}{\text{gemiddeld verzekeringsbedrag } i^{\text{te}} \text{ jaar}}$$

$$\mu_z = \sqrt{\frac{b_0}{N}}$$

$b_0 =$ gemiddeld schadequotient over de waarnemingsjaren

$\bar{n} =$ gemiddeld aantal verzekerde eenheden.

A. Voor maatschappijen met onvoldoende herverzekeringpolitiek

Q te berekenen aan de hand van het statistische materiaal

B. Maatschappijen met aan redelijke eisen voldoende herverzekeringpolitiek

1. inhomogene portefeuille, weinig veranderlijke schadekans

$$Q = 0,75$$

2. vrijwel homogene portefeuilles, variërende schadekans $Q = 1,25$

3. overige maatschappijen $Q = 2$

4. Maatschappijen met over-herverzekering

Q te berekenen aan de hand van het statistisch materiaal

Bedrijfsreserve van de portefeuilles.

Voor iedere groep (2) wordt R_2 berekend
Combinatie van de groepen

$$R = (R_1^2 + R_2^2 + \dots + 2x_{12} R_1 R_2 + \dots)^{\frac{1}{2}}$$

Minimum bedrijfsreserve R' bij kans $\frac{99}{100}$

Maximum bedrijfsreserve R'' bij kans $\frac{999}{1000}$

In dynamisch verband $R'' \sqrt{3}$

Bedrijfsreserve uitgaande van het massaverschijnsel der schadequotienten per jaar.

Kanswet

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)^n}$$

x = schadequotient

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 10^{-1}$$

$$y = b_0 + c_p \mu_p ; \quad b_0 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i}$$

$$\mu_p^2 = \frac{\sum (x_i - b_0)^2 y_i}{\sum y_i}$$

Bij zes maatschappijen A, B, ..., uitkomsten voor C

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1.9	3.3	1.2	3.2	1.8	3.4
3	4.7	5.1	4.0	4.9	4.4	5.5

Bedrijfsreserve $C_p \mu_p V$; V = totaal verzekerd kapitaal eigen risico

Minimum bedrijfsreserve $3 \mu_p V$; kans $\frac{99}{100}$; $C_p = 3$

Maximum bedrijfsreserve $4 \frac{1}{2} \mu_p V$; kans $\frac{999}{1000}$; $C_p = 4 \frac{1}{2}$

In dynamisch verband

$$V = C_p V_1 + v(\sqrt{2}-1) + v^2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots$$

$$v = (1+i)^{-1}$$

(rentevoet)

In dynamisch verband

Minimum bedrijfsreserve $3 \mu_p V = R'$

Maximum bedrijfsreserve $4 \frac{1}{2} \mu_p V \sqrt{3} = 7 \frac{1}{2} \mu_p V = R''$

EigenbehoudStabiliteits eis

$$x = \frac{\sqrt{M_2}}{M_1'} \quad \text{zo klein mogelijk}$$

M_1' = totaal risicopremie

M_2 = 2e moment t.o.v. M_1'

Bij n verzekeringen, verzekerd kapitaal K en risicopremie $K\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum x_i \omega(x_i) \quad ; \quad \omega(x_i) = \text{kans brand } x_i \text{ op verzekerd kapitaal}$$

$$M_2 = n K^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 \omega(x_i)$$

$$x^2 = \frac{\sum x_i^2 \omega(x_i) - \bar{x}^2}{n \bar{x}^2}$$

Toevoeging aan portefeuille van een nieuwe post onafhankelijk van de portefeuille; verzekerd kapitaal K , risicopremie $K\bar{x}$; spreiding $K^2 \bar{v}^2$

$$x^2 = \frac{M_2 + K^2 \bar{v}^2}{(M_1' + K\bar{x})^2}$$

minimum als

$$K = \frac{M_2}{M_1'} \frac{\bar{x}}{\bar{v}^2} \quad \text{(eigenbehouds formule)} \\ \text{onafhankelijk}$$

Bij afhankelijkheid

$$M_2 + K^2 \bar{v}^2 + 2zK\sqrt{M_2 \bar{v}^2}$$

$$2zK\sqrt{M_2 \bar{v}^2} = 2z_1 K K_1 \sqrt{\bar{v}_1^2 \bar{v}^2} + 2z_2 K K_2 \sqrt{\bar{v}_2^2 \bar{v}^2}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \left\{ K_1 z_1 \sqrt{\bar{v}_1^2} + \dots \right\} = \frac{F}{\sqrt{M_2}}$$

$$x^2 = \frac{M_2 + K^2 \bar{v}^2 + 2F K \sqrt{\bar{v}^2}}{(M_1' + K\bar{x})^2} \quad \text{min.}$$

$$K = \frac{M_2}{M_1'} \frac{\bar{x}}{\bar{v}^2} - \frac{F}{\sqrt{\bar{v}^2}} \quad \text{(eigenbehouds formule)} \\ \text{afhankelijk}$$

Eis constante risico-kans

(Verband tussen toeslagpremie tot egalisatie van risico en het kapitaal in eigenbehoud).

$\bar{z}$ = risico-kans d.i. de kans, dat de schade in een jaar het totaal der dekkingmiddelen overtreft.

$$\frac{dF(T)}{dT} = f(T) \quad \text{waarbij } f(T)dT = \text{kans schade tussen } T \text{ en } T+dT \\ F(T) = \text{kans schade} \leq T.$$

D = totaal der dekkingsmiddelen

$$Z = \int_D f(T) dT = \int_0^1 dG(u) \int_D f(T) dT$$

Invoer nieuwe post kapitaal K , risicopremie $K\bar{\eta}$; spreiding $K^2\sigma^2$ en toeslagpremie $K\eta$

$$\bar{T} = \int_0^1 1 dG(u) = \int_0^1 1 g(u) du$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 u^2 g(u) du - \bar{T}^2$$

Voorts is

$$\bar{Z} = 1 - \bar{T}$$

$$\delta D = K(\bar{T} + \eta)$$

Na toevoeging post wordt nieuwe frequentiewet $\psi(T)$

$$\psi(T) = \int_0^1 f(T - Ks) dG(s)$$

$$Z' = \int_{D+\delta D}^\infty \psi(T) dT = \int_0^1 dG(s) \int_{D+\delta D-Ks}^\infty f(T) dT$$

$$Z' - Z = \int_0^1 dG(s) \int_D^{D+\delta D-Ks} f(T) dT = K f(D) \eta + \frac{1}{2} K' f'(D) (\eta^2 + \sigma^2)$$

$Z' - Z = 0$ risicokans constant

$$K = \frac{2\eta}{\eta^2 + \sigma^2} \frac{f(D)}{-f'(D)} = \frac{2}{\eta^2 + \sigma^2} \frac{M_1}{D - M_1} \approx \frac{2\eta}{\sigma^2} \frac{M_1}{R}$$

$$\eta = \frac{1}{2} R \frac{\bar{\eta}}{M_1} \quad R = \text{natuurlijke bedrijfsreserve}$$

Verband tussen eigen-behoud, toeslagpremie en natuurlijke bedrijfsreserve

$R < \frac{R' + R''}{2}$	$R > \frac{R' + R''}{2}$
$\eta = \frac{1}{2} R \frac{\bar{\eta}}{M_1}$	$\eta = \frac{1}{2} R \frac{\bar{\eta}}{M_1}$
$K = \frac{\bar{\eta}}{\sigma^2} \frac{M_1}{M_1'}$	$K' = fR \quad f = \frac{R}{\frac{1}{2}(R' + R'')}$
	$1 < f \leq 2$
max. stabiliteit risico-kans constant	stabiliteit neemt niet af risico-kans neemt toe

Bepijdering van η

$$M_1 \approx R \quad \eta = \frac{1}{10} \gamma$$

$$\gamma = \text{toeslagpremie p. jaar} = \frac{1}{10} \eta$$

$$\gamma = 5\% \text{ van de risico-premie}$$

Bepijdering van $\frac{\bar{S}}{\sigma^2}$ (eigen-behouds coëfficient)

Schadetabel Riesesall

$$\int_0^1 \lambda P_2(\lambda) d\lambda = S_2 = 0.1462$$

$$\int_0^1 \lambda^2 P_2(\lambda) d\lambda = S_2' = 0.0773$$

$$\left(\frac{\bar{S}}{\sigma^2}\right) = \frac{A_1 S_1}{A_1 S_2 - (A_1 S_1)^2} \sim \frac{S_1}{S_2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) = 1.88(1 + 1.88) \approx 2$$

Bepijdering M_1 M_1 te stellen op $\mu_p^2 \gamma^2$ V = totaal verzekerd kapitaal eigen-risico

$$\mu_p^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 y_i}{\sum y_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i}$$

 $\bar{x}$ = aantal jaren waarin schadequotient μ_p voorkomt.

Voordracht getiteld:

WISKUNDIGE PROBLEMEN BIJ HET ECONOMISCH STEEKPROEFONDERZOEK.

door Drs P. de Wolff

In de economie, alsook in andere geesteswetenschappen zoals sociologie en psychologie, wordt in steeds toenemende mate gebruik gemaakt van het statistisch onderzoek. Aan vankelijk ging men daarbij zuiver beschrijvend te werk. Geleidelijk werd ook speciaal in de economie van de methoden van de statistische analyse gebruik gemaakt. Er is hier zelfs een afzonderlijk gebied van onderzoek ontstaan, de zg. econometrie, waaronder men verstaat de wetenschap, die zich bezig houdt met het meten van de economische grootheden en de tusschen hen bestaande relaties. Aangezien reeds spoedig bleek, dat het bestaande apparaat der statistische analyse wel zeer geschikte aanknopingspunten kon opleveren voor het econometrische onderzoek, maar niet een volledig stelsel adequate hulpmiddelen ter beschikking kon stellen, hebben vele econometristen zich met groot succes beijverd voor het verbeteren van het statistische apparaat.

De econometrie moet wel onderscheiden worden van de wiskundige economie. Hieronder verstaat men een speciale behandelingswijze van vraagstukken op het gebied der theoretische economie. Iedere wetenschap, die zich in meer exacte richting ontwikkelt, d.w.z. waar men geleidelijk komt tot scherpe definities der grondbegrippen en waar de mogelijkheid zich voordoet om deze begrippen quantitief vast te leggen, zal als regel met vrucht van wiskundige beschouwingen gebruik kunnen maken. Dit geldt ook voor de economie. Doordat een deel van de beoefenaren dezer wetenschap echter weinig wiskundig geschoold is, wordt vaak een tegenstelling tusschen de wiskundige economie en de niet-wiskundige soms ook als literaire aangeduide economie gemaakt, ten nadele zowel van de wiskundige als van de niet-wiskundige behandelingswijze der vraagstukken. In de laatste jaren begint echter een juister inzicht daar te breken.

In principe kan ieder onderdeel van de mathematische statistiek bij het econometrische werk worden toegepast. De statistische hulpmiddelen zijn in de regel universeel bruikbaar. In feite hebben de toepassingen zich in hoofdzaak tot twee groten beperkt, n.l. de steekproeven-theorie en de correlatierekening. Een gebied als dat der variantie-analyse, waarmee in de biologie zulke belangrijke resultaten zijn bereikt, heeft tot nu toe in de econometrie, voor zover mij bekend althans, geen aanwending gevonden.

Hoewel buiten ons eigenlijke onderwerp liggend, zij opgemerkt, dat in de wiskundige economie zeer uiteenlopende wiskundige methoden worden gebezigd. Van de methoden der analyse is vooral veel profijt getrokken.

Teneinde de gelegenheid te hebben enkele problemen meer in detail te kunnen behandelen, heb ik mij, wat de keuze der stof betreft, beperkt tot de steekproeven, zoals ook uit de titel van mijn voordracht blijkt. Ik wil echter met enkele woorden aanduiden, waarom de correlatierekening zo belangrijk is voor de econometrie. Het is in de economie bijna nooit mogelijk om te experimenteren in de zin, die daar in de natuurwetenschappen aan wordt gehecht. Dit heeft tot gevolg, dat de econoom meestal aangewezen is op de gegevens, die de historie oplevert. Wanneer hij nu het verband tusschen twee verschijnselen a en b wil bestuderen, dan zal hij als regel ervaren, dat a in het historisch verloop, niet alleen door b maar nog door één of dikwijls zelfs meer dan één ander verschijnsel werd beïnvloed. Hij moet dus eerst trachten na te gaan, welk deel van de variaties van a aan de invloed van variaties van b kan worden toegeschreven en welk deel voor rekening van de andere factoren resp. van storingen van onbekende herkomst komt. Hiervoor is de methode der multi-pele correlatierekening het aangewezen hulpmiddel. Hier geldt echter in het bijzonder, hetgeen reeds in het begin werd opgemerkt, dat de correlatierekening, zoals ze door de biologische statistici, als bijv. R.A. Fisher, was opge-

keld, niet zonder meer in de econometrie kan worden aangewend. Problemen als hoge correlaties tussen de verschijnselen, die als verklarende factoren voor een ander verschijnsel worden beschouwd, correlaties tussen de waarden die een bepaald verschijnsel op achtereenvolgende tijdstippen inneemt en de vraag, op welke wijze volledige vergelijkingssystemen, die voor de economie van zo grote betekenis zijn, met behulp van een correlatieberekening kunnen worden bepaald, vormen moeilijkheden, die in de biologische toepassingen grotendeels onbekend waren. Deze moeilijkheden zijn ook thans nog niet geheel overwonnen, maar er is reeds veel bereikt en aan de volledige oplossing wordt hard gewerkt.

De theorie der steekproeven vormt een belangrijke steun voor de econometrie, omdat in de gevallen, waarin de econoom tot meten in staat is, hij heel dikwijls van een steekproefonderzoek gebruik zal moeten maken, of anders gezegd, veelal zal het blijken, dat bepaalde resultaten in het geheel niet te meten zijn, in verband met de hoge kosten, als men niet tot een steekproef zijn toevlucht neemt. Juist de ontwikkeling van de econometrie heeft hier stimulerend gewerkt, want daardoor ontstond behoefte aan gegevens, die voordien zelden verzameld werden.

In ons land is het economisch steekproefonderzoek nog niet sterk ontwikkeld. Het beperkt zich grotendeels tot hetgeen grote ondernemingen op dit gebied, ter ondersteuning van hun bedrijfspolitiek verrichten (commercieel opinie onderzoek). In de V.S. daarentegen, dat op dit gebied voorreken gaat, wordt in de officiële statistiek ook reeds een ruim gebruik van steekproeven gemaakt.

Het eenvoudigste geval van een steekproefonderzoek bestaat hierin, dat men uitgaat van een gemakshalve oneindig groot onderstelde massa (universum), bestaande uit twee soorten objecten, goed en slecht, en de verhouding p en q ($p + q = 1$). Als men uit dit universum een steekproef kijkt van n elementen en men gaat daarbij volgens het toeval te werk (d.w.z. zo dat ieder element uit het universum dezelfde kans heeft om onderzocht te worden) dan is de kans W_L dat L de steekproef L goede (en dus $n-L$ slechte) elementen voorkomen gelijk aan:

$$W_L = \binom{n}{L} p^L q^{n-L} \quad (1)$$

Hieruit volgt gemakkelijk, dat de gemiddelde waarde van L over een (oneindig) groot aantal steekproeven gelijk is aan

$$\bar{W}_L = np \quad (2)$$

terwijl de standaarddeviatie van L (wederom berekend over een groot aantal steekproeven) gegeven is door

$$\sigma_n = \sqrt{npq} \quad (3)$$

De modus van de verdeling der W_L ligt praktisch bij np en valt dus met het gemiddelde samen. Daar verder de verdeling unimodaal is en naar weer zijden van de top monotoon afneemt, mag de ongelijkheid van Meidell en Camp (generalisatie van de stelling van Tschetscheff) worden toegepast die zegt:

$$P(|L - np| > k\sigma_n) \leq \frac{1}{2.25k^2} \quad (4)$$

Daar σ toeneemt met $\sqrt{n}$ en np met n zal dus de kans op een relatieve afwijking van bepaalde grootte zeer snel afnemen als n groter wordt gekozen.

De uitspraak (4) kan nog verscherpt worden door gebruik te maken van het feit, dat (1) voor grote waarden van n nadert tot een verdeling van Gauss. Deze luidt:

$$P(|L - np| > k\sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5)$$

Met behulp van deze formule en een tabel van de z.g. waarschijnlijkheidsintegralen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ is het mogelijk om in ieder voorkomende

geval snel aan te geven hoe groot de waarschijnlijkheid is om het resultaat van de steekproef tussen van te voren aan te geven grenzen L_1 aan te treffen. In de praktisch voorkomende gevallen is het steeds om n zo groot te kiezen, dat enerzijds $P(L_1 \leq L \leq L_2)$ weinig van

verschilt, terwijl anderzijds $1-\epsilon$ klein gekozen kan worden t.o.v. n/p . Hierdoor worden uitspraken mogelijk, die praktische betekenis hebben. Deze uitspraken houden echter steeds een waarschijnlijkheidskarakter.

In de praktijk werkt men natuurlijk steeds met eindige universa. Neemt men daaruit de steekproef zodanig, dat de elementen één voor één getrokken worden en na inspectie weer worden teruggelegd, dan blijven de formules (1) t/m (3) onveranderd geldig. Meestal vindt teruglegging echter niet plaats en dan moet (1) vervangen worden door:

$$W_i^{(n)} = \binom{N-n}{pN-\epsilon} \cdot \left(\frac{N}{pN}\right)^{-1} \quad (6)$$

Hierdoor gaat (3) over in:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot npq} \quad (7)$$

(2) blijft ongewijzigd.

Uit (7) blijkt, dat σ_n , in het geval van niet-terugleggen, gelijk nul wordt, als $n = N$, geheel in overeenstemming met de verwachting.

In vele gevallen heeft men niet te maken met een universum, bestaande uit twee soorten, of anders gezegd, uit elementen, waarbij een bepaalde eigenschap slechts twee verschillende waarden kan aannemen, doch met een universum, waarin een dergelijke eigenschap waarden kan opleveren, die (in een zeker interval) continu kunnen variëren.

De afgeleide formules gelden voor dat geval evenzeer als men overal p of q vervangt door σ , als σ de standaarddeviatie in het universum voorstelt van de onderzochte variabele x . Als de verdelingsfunctie van x in het universum luidt:

$$P(x \leq X) = F(X) \quad (8)$$

dan is σ gedefinieerd door:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF \quad (9)$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 dF} \quad (10)$$

De tot nu toe behandelde formules zijn nog niet dadelijk voor praktische toepassingen geschikt. Men is als regel niet geïnteresseerd in de uit (5) volgende waarschijnlijkheid, dat de samenstelling van de steekproef tussen bepaalde grenzen ligt, als het universum bekend is, maar juist omgekeerd, men wil uit de steekproef conclusies trekken over de waarden van de parameters, die het universum bepalen (de grootte van p resp. de waarden van in

$F(X)$ optredende parameters). Dit z.g. omkeervraagstuk leidt tot moeilijkheden, die verband houden met het feit, dat het wel mogelijk is om te spreken over de waarschijnlijkheid, dat in een zekere steekproef, ligt tussen a en b , als p bekend is, maar dat de waarschijnlijkheid, dat p tussen twee grenzen ligt als f (met een steekproef) gevonden is, meestal zinloos is. Gewoonlijk is p een constante, die slechts één bepaalde waarde heeft.

Een elegante oplossing uit deze moeilijkheid is gegeven door Neyman in zijn theorie van de z.g. "inductive behaviour". Hierbij leidt hij uit de gevonden waarde van p twee grenzen af, die zoals hij het uitdrukt een "confidence interval" begrenzen. Het is nu steeds mogelijk om deze grenzen zo te kiezen, dat er een gegeven waarschijnlijkheid $1-\epsilon$ bestaat, dat het confidence interval over de goede waarde van p "heenvalt". De statisticus, die deze "behaviour" volgt, zal zich slechts in $100\epsilon\%$ gevallen vergissen.

ϵ kan hier zo klein mogelijk gekozen worden. Dit gaat echter ten koste van de breedte van het confidence interval.

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot de theorie van de enkelvoudige steekproef. Hierbij was de nauwkeurigheid van het resultaat (voor een gegeven universum) alleen afhankelijk van de grootte van n . In de praktijk kan men vaak het universum in subuniversa of strata splitsen, waardoor behalve de grootte van n ook de verdeling daarvan over de verschillende strata een rol speelt. Hierbij doet zich dan dadelijk het economische probleem voor, deze verdeling zo in te richten, dat de nauwkeurigheid, waarmee de parameters

van het gehele universum tenslotte worden bepaald, zo hoog mogelijk wordt, als de totale kosten van het onderzoek gegeven zijn.

Wij zullen hiervan nog twee voorbeelden behandelen. De eerste is het geval van stratified sampling. Dikwijls kan men het universum in strata of lagen verdelen, die ieder voor zich een grotere homogeniteit vertonen, dan het universum als geheel. Bijv. een verdeling naar welstandsklassen of naar geografische criteria enz. Weet men nu, dat de spreiding van de te onderzoeken grootheden in deze strata verschillend is, dan kan men, daarmee rekening houdend, de nauwkeurigheid van de steekproef (bij dezelfde kosten) hoger opvoeren dan bij een enkelvoudige steekproef mogelijk is. Vaak is een dergelijke kennis af te leiden uit de resultaten van voorafgaande onderzoeken of anders uit een proefonderzoek op kleine schaal. Stel dat er k lagen zijn, ieder met N_i elementen $\sum N_i = N$. Laat verder de standaarddeviatie van het te onderzoeken verschijnsel in laag i gelijk zijn aan σ_i , de kosten voor het onderzoek per element σ_i en de grootte van de (sub) steekproef n_i ($\sum n_i = n$), dan kan men gemakkelijk bewijzen, dat de C_w voor het gemiddelde van het verschijnsel over de gehele steekproef minimaal is als:

$$\frac{n_i}{N_i} = \lambda \frac{\sigma_i}{\sqrt{C_i}} \quad (11)$$

λ is een constante, die bepaald wordt door de conditie, dat de totale kosten C gelijk zijn aan $\sum n_i C_i$. Dit levert

$$C = \lambda^2 \sum N_i \sigma_i^2 / C_i \quad (12)$$

Uit (11) volgt, dat het dus voordelig is de steekproef niet-representatief te kiezen (representatief betekent $\frac{n_i}{N_i}$ constant). Hoe groter σ_i hoe groter ook n_i . Hoe groter C_i hoe kleiner n_i .

Het tweede heeft betrekking op de z.g. non-response. Bij enquêtes met vragenlijsten, die via de post aan de te onderzoeken personen worden toegezonden, heeft men dikwijls te maken met het bezwaar, dat slechts een gedeelte der ondervraagden antwoord geeft. Hierdoor dreigt het gevaar van vertekening, het is niet zeker, dat de personen, die tot antwoorden bereid zijn, een representatieve steekproef vormen. Daarom prefereert men vaak de methode van het persoonlijk bezoek. Deze is echter duurder en betere resultaten (voor een gegeven bedrag aan kosten) kunnen als regel verkregen worden door de groepen der antwoord- resp. geen antwoord-gevenden als twee strata te beschouwen. De eerste wordt dan schriftelijk, de tweede mondeling geënquêteerd. Het is nu natuurlijk nodig om aan te geven, hoe groot de steekproeven moeten zijn bij gegeven kosten. Noemt men:

C_1 , resp C_2 en C_3 de kosten per geval van het uitsturen van de vragenlijst, van het bewerken van en teruggezonden vragenlijst, resp. van een persoonlijk bezoek plus de daarop volgende bewerking,

n het aantal per post uit te zenden vragenlijsten

r " " bezoeken bij niet-antwoord-gevenden

s " " der niet-antwoord-gevenden

P de verhouding van antwoord-gevenden op het totaal der te enquêteren personen (in het universum)

σ = de standaarddeviatie van het verschijnsel in het universum

ϵ = de toegelaten standaardfout van het gezochte gemiddelde,

dan geldt:

$$n = \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \frac{C_1 P}{1 - P} + \frac{C_2 P}{P} + \frac{C_3}{1 - P} \right\} \quad (13)$$

$$r = \frac{s}{P} \quad (14)$$

$$\text{Hierbij is } k = \sqrt{\frac{C_1 P}{C_2 + C_3 P}} \quad (15) \quad \text{en} \quad h = \frac{N \sigma^2}{\frac{C_1^2}{1 - P} + \frac{C_2^2}{P} + \frac{C_3^2}{1 - P}} \quad (16)$$

Met behulp van deze formules kan bij iedere ϵ de juiste waarde van n en r bepaald worden. Zijn de totale kosten gegeven ($C = n C_1 + r C_2 + s C_3$) dan is daaruit weer ϵ te bepalen. Hierdoor is ook dat geval algemeen opgelost.

Mathematische problemen uit de theorie der
laminare grenslaagstroming.

door

dr. R. Tjeman.

Dit rapport bevat de tekst van een voordracht,
die door de schrijver op 15-11-1947 zal worden gehouden
in een bijeenkomst, georganiseerd door het "Mathematisch
Centrum".

1. Inleiding.

In de theorie van de niet-samenindrukbare wrijvingsvloeistof kan men, vooral wanneer men stationnaire twee-dimensionale stromingen beschouwt, zeer fraaie resultaten bereiken, zelfs zo, dat in dit laatste geval vrijwel elk probleem dat zich voordoet, opgelost kan worden door toepassing van de machtige hulpmiddelen, die de functietheorie ter beschikking stelt.

Dit is echter niet het geval, wanneer men de viscositeit van het medium in rekening brengt. Tot een exacte integratie van de optredende differentiaalvergelijkingen is men, behoudens in een enkel zeer eenvoudig geval, nog niet gekomen. Integendeel zelfs onder sterk vereenvoudigende veronderstellingen heeft men het in het algemeen nog niet verder gebracht dan benaderingsoplossingen, die min of meer goede resultaten opleveren.

Het doel van deze voordracht zal zijn een overzicht te geven van de mathematische methoden, die gebruikelijk zijn bij de behandeling van de vergelijkingen van de visceuze, niet-samenindrukbare vloeistof in de veronderstelling, dat, zoals dat bij de lucht het geval is, de viscositeit een kleine waarde heeft.

Hierbij wordt de verdere restrictie gemaakt, dat alleen de z.g. laminaire stromingen in de beschouwing betrokken worden. Naast deze stromingen komen nl. andere stromingsvormen voor, die gekarakteriseerd worden door het optreden van onregelmatige fluctuaties van de snelheid, de z.g. turbulente stromingen.

De laatste maakt bij een mathematische behandeling geheel andere hulpmiddelen nodig, nl. de methoden der statistiek. Zij vallen buiten het kader van de hier te bespreken onderwerpen.

De visceuze stromingen worden geheel beheerst door de vergelijkingen van Navier-Stokes.

Nadat hiervoor een afleiding gegeven is in algemene kromlijnige coördinaten, wordt in het speciale geval van kleine viscositeit de approximatie ingevoerd, die tot de vergelijkingen van Prandtl voor de grenslaagstroming voert.

Bij de bespreking van deze vergelijkingen worden eerst enige mathematische methoden behandeld, waarbij de exacte oplossing zo goed mogelijk wordt benaderd.

Daarna wordt de zeer veel toegepaste methode van Von Karman-Pohlhausen besproken, die principieel afziet van een poging om de exacte oplossing te verkrijgen, maar in plaats daarvan op een snelle wijze voor bepaalde praktische problemen, i.e. de berekening van de wrijvingsweerstand, bruikbare resultaten oplevert.

2. De vergelijkingen voor visceuze vloeistoffen.

In vectorvorm geschreven zijn de bewegingsvergelijkingen voor een elementje van een stromende onsamendrukbare vloeistof bij afwezigheid van uitwendige krachten

$$\underline{b} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \underline{\chi} \quad (2.1)$$

als $\underline{b}$ de versnelling, ρ de dichtheid en $\underline{\chi}$ de door de omgeving uitgeoefende kracht (per volume-eenheid) op het vloeistofelement voorstelt.

Naast deze vergelijking geldt de continuïteitsvergelijking die voor een niet-samenindrukbare vloeistof de vorm heeft:

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0.$$

In cartesische coördinaten zien de vergelijkingen er dus als volgt uit:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \chi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.3)$$

de grootheden χ_1 worden nu opgeleverd door sommeling van

Deze symmetrische spanningen worden nu opgeleverd door sommeling van de grootheden Φ_{ik} met de betekenis:

Φ_{ik} is de k^e component van de spanningen in de i^e richting, dat loodrecht op de i -richting staat, onderling op de i en k naar de negatieve i -richting getekend is. Zo zijn de componenten Φ_{11} de normaalspanningen, en Φ_{ik} ($i \neq k$) de schuifspanningen in de i -richting van het vloeistofelement.

Voor een ideale vloeistof worden de Φ_{ik} gereduceerd tot de vorm

$$\Phi_{ik} = p \cdot \delta_{ik} \quad (2.4)$$

waarin $\delta_{ik} = 0 \quad i \neq k$
 $\delta_{ik} = 1 \quad i = k$

In een visceuze vloeistof worden de spanningcomponenten verkregen door een generalisatie van de wet

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dx} \quad ;$$

die voor een parallelstroming geldt, nl.

$$\frac{1}{\rho} \Phi_{ik} = \frac{1}{\rho} p \delta_{ik} - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

of wel

$$\frac{1}{\rho} \Phi_{ik} = \frac{p}{\rho} \delta_{ik} - 2 \nu \cdot e_{ik} \quad (2.6)$$

als

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.7)$$

de z.g. kinematische viscositeit voorstelt en de grootheden e_{ik} gedefiniëerd zijn als

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

De krachten per volume-eenheid χ_1 worden nu opgeleverd door sommeling van de spanningen over het gehele oppervlak, met het resultaat

$$\chi_1 = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial x^k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1} + \nu \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^{k2}} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^1 \partial x^k} \right) \quad (2.9)$$

Op grond van de continuïteitsvergelijking gaat dit over in

$$\chi_1 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^{k2}} \quad (2.10)$$

De bewegingsvergelijkingen worden dus:

$$b_1 = \frac{dv_1}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^{k2}} \quad (2.11)$$

3. De bewegingsvergelijkingen in algemene kronlijnige coördinaten.

Bij de berekening van de visceuze straining om een gekromd oppervlak zal men er de voorkeur aan geven kronlijnige coördinaten te gebruiken, zodanig dat dit oppervlak voorgesteld wordt door de vergelijking

$$x^1 = \text{const. (Levi-Civita).}$$

In dit geval wordt het lijnelement voorgesteld door de onderstaande vergelijking, waarin, zoals steeds in het vervolg, van de sommatieconventie gebruik is gemaakt

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (3.1)$$

Voor een bewegend punt zijn de x^i functies van een parameter t en de componenten van de snelheidsvector $\underline{v}$ worden gedefinieerd door

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (3.2)$$

De kinetische energie wordt dan per volume-eenheid

$$T = \frac{1}{2} \underline{v}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{1}{2} g_{ik} v^i v^k \quad (3.3)$$

De covariante componenten van de vector $\underline{v}$ hebben hier de betekenis van de momenten

$$v_i = \frac{\partial T}{\partial v^i} = g_{ik} v^k.$$

De versnellingscomponenten worden in algemene coördinaten geleverd door de uitdrukkingen

$$b_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i}$$

Een volledig uittrekken van deze uitdrukking is enigszins onslachtig, eenmaal op de hoogte van het feit, dat de aldus gedefinieerde grootheden een tensor is, is het voldoende om de vergelijking in rechthoekige coördinaten

$$b_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \quad (3.4)$$

in invariante vorm te schrijven, d.w.z. de differentiaal quotiënten door covariante differentiaties te vervangen

$$b_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \cdot \nabla_k v_i. \quad (3.5)$$

De continuïteitsvergelijking wordt zeer eenvoudig voor algemene coördinaten gevonden, nl. door hier eerst in de cartesische ruimte in verg. (2.3) v_i door v^i te vervangen en daar de differentiaties als covariante differentiaties te schrijven, of ook door de differentiaties door contravariante differentiaties te vervangen

$$\nabla_i v^i = \nabla^i v_i = 0. \quad (3.6)$$

Het is verder bekend, dat deze vergelijking ook geschreven kan worden in de vorm

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} v^i}{\partial x^i} = 0. \quad (3.7)$$

De spanningstensor Φ_{ik} , in de rechthoekige coördinaten gegeven door (2.6), wordt opgeleverd door:

$$\Phi_{ik} = p \cdot \delta_{ik} - 2 \mu \cdot e_{ik} \quad (3.8)$$

waarbij de tensor e_{ik} gedefinieerd wordt door (2.8) invariant te schrijven:

$$e_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_k v_i + \nabla_i v_k) \quad (3.9)$$

De covariante kantallen de krachten χ_i worden nu gegeven door de contravariante differentiaten van Φ_{ik}

$$\begin{aligned} \chi_i &= -\nabla^k \Phi_{ik} = \\ &= -\nabla^k p \cdot \delta_{ik} - 2 \mu \cdot (\nabla^k \nabla_k v_i + \nabla^k \nabla_i v_k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Daar in de euklidische ruimte, die hier uit de aard der zaak alleen wordt beschouwd, co- en contravariante differentiaties verwisselbaar zijn, door het identiek nul zijn van de krommingstensor, wordt

$$\nabla^k \nabla_i v_k = \nabla_i \nabla^k v_k = 0 \quad (3.11)$$

wegens de continuïteitsvergelijking (vgl. 2).

Tenslotte nemen dan de vergelijkingen van Navier Stokes geschreven de vorm

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \nabla_k v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \nabla^k \nabla_k v_i \quad (3.12)$$

aan.

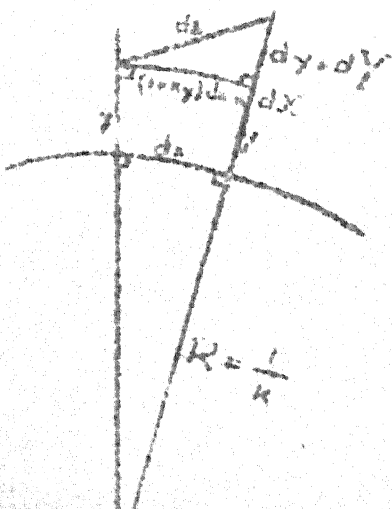
4 De differentiaalvergelijkingen voor de laminaire grenslaag.

Zoals uit de vorm (3.12) blijkt, zijn de algemene vergelijkingen voor de viscouse stromingen buitengewoon gecompliceerd, zo gecompliceerd, dat een analytische integratie niet mogelijk is.

Om nu tot een systeem vergelijkingen te komen, dat voor een analytische behandeling toegankelijk is en dat van toepassing is op de stroming van een medium met geringe viscositeit wordt een reeks vereenvoudigende opstellingen ingevoerd. ^{der}

a) De behandeling wordt consequent beperkt tot vlakke stroming, zodat slechts 2 coördinaten x' en x'' optreden.

Het coördinatensysteem, dat geschikt is om de stroming langs een gekromd oppervlak te beschrijven wordt gevormd dus de lengte van de boog, gemeten vanaf een zeker punt, die de normaal uit het beschouwde punt op het oppervlak insnijdt op de wandkromme en de afstand van het punt tot de wandkromme.



Is de plaatselijke kromming van de wand $k = \frac{1}{R}$, dan wordt het boogelement

$$ds^2 = dy^2 + (1 + ky)^2 dx^2 \quad (4.1)$$

waarin k een functie van x is.

De snelheidscomponenten u en v worden ingevoerd als differentiaalquotienten naar de tijd van de plaatselijk Cartesische coördinaten X en Y , bepaald door

$$dX = (1 + ky) dx \quad \text{en} \quad dY = dy \quad (4.2)$$

In dit geval is dus:

$$u = \frac{dx}{dt} = (1+ky) \frac{dx}{dt} = (1+ky)v = \frac{v}{1+ky} \quad (4.3)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} = v^2 = v_2$$

Na een omvangrijke berekening worden dan de vergelijkingen voor de visceuze stroming: Goldstein, blz.119)

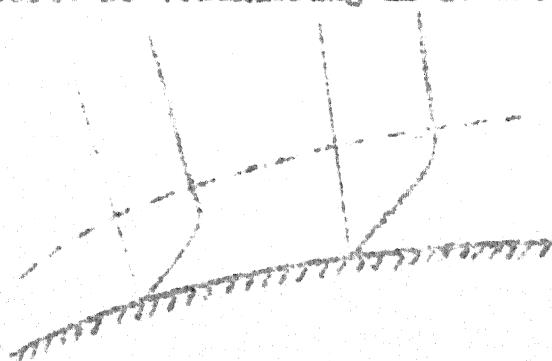
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+ky} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{1+ky} uv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + v \left[\frac{1}{(1+ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+ky)^3} \frac{dk}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{(1+ky)^2} u + \frac{1}{(1+ky)^3} \frac{dk}{dx} v + \frac{2k}{(1+ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{1+ky} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k}{1+ky} u^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + v \left[\frac{1}{(1+ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+ky)^3} \frac{dk}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial v}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{(1+ky)^2} v - \frac{1}{(1+ky)^3} \frac{dk}{dx} u - \frac{2k}{(1+ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(1+ky)v] = 0 \quad (4.6)$$

b) De vergelijkingen (4.4), (4.5) en (4.6) worden aanmerkelijk vereenvoudigd door in navolging van Prandtl het begrip "grenslaag" in te voeren [Prandtl a]

Bij de visceuze stroming langs een wand wordt aangenomen, dat de deeltjes zich hechten aan de wand, dus dat daar ter plaatse de snelheid nul is. Op enige afstand van de wand zal de snelheid in het algemeen een grote waarde hebben, die naarmate de afstand groter wordt nadert tot de waarde van de snelheid, die een zuivere potentiaalstroming langs de wand heeft. De verandering in de snelheid is vlak bij de wand het grootst.



Aangezien de schuifspanningen evenredig zijn met de gradiënt van de snelheid zal de schuifspanning vlak bij de wand groter zijn dan op enige afstand, zodat in het laatste gebied de visceuze krachten te verwaarlozen zijn t.o.v. de massa- en drukkrachten in de stroming.

De veronderstelling, die aan de theorie der grenslagen ten grondslag ligt is nu, dat alleen in een dunne laag langs de wand, de grenslaag genaamd, deze visceuze krachten dezelfde orde van grootte bezitten,

als de massa- en drukkrachten, terwijl zij buiten deze laag geheel te verwaarlozen zijn. In dit gebied kan de stroming (de z.g. vrije stroming) geheel als potentiaalstroming worden opgevat.

Het invoeren van het begrip grenslaag berust dus op het maken van schattingen voor de grootte van de termen van verschillende fysisch karakter.

ter in de differentiaalvergelijkingen van Navier-Stokes.

Deze schattingen worden meestal gemakkelijker gemaakt door dimensieloze grootheden in te voeren. Neemt men dan aan, dat de dimensieloze gemaakte termen in de differentiaalvergelijking dezelfde orde van grootte hebben, dan wordt de verhouding van de verschillende bijdragen geleverd door kentallen, die eveneens dimensieloos zijn. Om dit uit te voeren worden alle lengten in de richting van de wand uitgedrukt in een zekere standaardlengte l (bv. bij de stroming om een vleugelprofiel de profielhoorde) en alle snelheden in deze richting in een zekere standaardsnelheid U (bv. de snelheid in het oneindige van de vrije stroming).

Alle afstanden tot de wand worden echter niet in l uitgedrukt, maar in een lengte δ , die later gemakkelijk met de dikte van de grenslaag in verband gebracht kan worden.

Op deze wijze wordt dan

$$\begin{aligned} x &= l x' \\ y &= \delta y' \\ u &= U u' \\ t &= \frac{l}{U} t' \\ k &= \frac{k'}{l} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Om aan de continuïteitsvergelijking (4.6) te kunnen voldoen door twee termen van dezelfde orde van grootte wordt dan gesteld:

$$v = \frac{\delta}{l} U v' \quad (4.8)$$

Verder heeft, daar in de vrije stroming de wet van Bernoulli geldt:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} = C,$$

de grootheid p/ρ de dimensie van het kwadraat van een snelheid. Het ligt dus voor de hand te stellen:

$$\frac{p}{\rho} = U^2 \frac{p'}{Q} \quad (4.9)$$

Door deze substituties gaan de vergelijkingen (4.4), (4.5) en (4.6) over in:

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{l} \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{1}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{k'}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} u' v' \frac{\delta}{l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) = \\ = \frac{U}{\delta^2} \left[\frac{\delta}{l^2} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^2} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} - \frac{v'}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^3} \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{\delta^3}{l^3} + \right. \\ + \frac{k'}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} \cdot \frac{\delta}{l} - \frac{k'^2}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')} \cdot u' \cdot \frac{\delta^2}{l^2} + \frac{1}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^3} \frac{dk'}{dx'} \cdot v' \cdot \frac{\delta^3}{l^3} + \\ \left. + \frac{2k'}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^2} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x'} \cdot \frac{\delta^3}{l^3} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\delta}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\delta}{l} + \frac{\delta}{l} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{k'}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} u'^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'} \frac{\delta^2}{l^2} \right) =$$

$$= \frac{U}{\delta^2} \left[\frac{1}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \frac{\delta^3}{l^3} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \cdot \frac{\delta}{l} - \frac{v'}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\delta^4}{l^4} + \right. \\ \left. + \frac{k'}{1 + \frac{\delta}{l} k' y'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y'} \cdot \frac{\delta^2}{l^2} - \frac{k'^2}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^2} v' \cdot \frac{\delta^3}{l^3} - \frac{1}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} u' \cdot \frac{\delta^2}{l^2} - \right. \\ \left. - \frac{2k'}{(1 + \frac{\delta}{l} k' y')^2} \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{\delta^2}{l^2} \right] \quad (4.11)$$

$$\frac{U}{l} \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\delta}{\partial y'} (1 + \frac{\delta}{l} k' y') v' \right] = 0 \quad (4.12)$$

De verhouding tussen de linker- en rechterleden zal dus worden gegeven door het dimensieloze getal: $\frac{U^2}{l} : \frac{\delta}{\delta^2} = \frac{U l}{\delta^2} = \frac{\delta^2}{l^2}$

Het getal $R = \frac{U l}{\delta^2}$ stelt het bekende dimensieloze getal van Reynolds voor de stroming voor. De dimensieloos gemaakte linker- en rechterleden in de vergelijkingen (4.10) en (4.11) zullen dus alleen dan dezelfde orde van grootte hebben, indien geldt

$$\frac{\delta}{l} \sim R^{-1/2}$$

Bij de stroming en vliegtuigvleugels heeft het getal van Reynolds een grote waarde nl. van de orde $4 \cdot 10^6$, zodat δ/l de grootste orde 10^{-3} heeft. Dit betekent, dat alleen in een dunne laag langs de wand de visceuze krachten van dezelfde orde van grootte zijn als de massa- en drukkrachten in de stroming.

In dat geval is het duidelijk, dat een aantal termen in de vergelijking van de orde $\delta/l = R^{-1/2}$ of kleiner is.

Bij verwaarlozing van deze termen neemt tenslotte de eerste vergelijking de vorm aan:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (4.13)$$

Bij de tweede vergelijking valt in de eerste plaats op dat de term $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'}$ noodzakelijk van de orde $\frac{\delta}{l}$ moet zijn en aan de vergelijking te kunnen voldoen. Bij verwaarlozen van de andere termen blijft dan alleen over

$$-k' u'^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'} \quad (4.14)$$

terwijl de continuïteitsvergelijking eenvoudig oplevert

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (4.15)$$

Uit de tweede vergelijking blijkt dat de drukgradiënt in de grenslaag in een richting loodrecht op de wand zeer klein is. Bij de stroming langs de vlakke wand is zij, omdat de kromtestraal oneindig groot is, in deze benadering, zelfs nul. De druk in de grenslaag is onafhankelijk van de afstand tot de wand. Dit geeft een belangrijke vereenvoudiging. Hoewel dit voor een gekromde wand niet geheel opgaat, (het linkerlid in (4.14) stelt de centrifugaalkracht voor) wordt vrijwel altijd deze veronderstelling in de berekeningen aangehouden. Bij een voldoende grote kromtestraal is deze benadering wel geoorloofd. Ook in de oorspronkelijke vergelijkingen (4.4), (4.5), (4.6) kunnen de termen, die in de dimensieloze vorm weggelaten zijn, natuurlijk verwaarloosd worden.

Dat geeft tenslotte de vergelijkingen voor de grenslaagstroming in de door Prandtl geïntroduceerde vorm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

In de vrije stroming, dus in het gebied waar $y \gg \delta$ is, kunnen de viscositeitstermen verwaarloosd worden. Hier kan de stroming dus geheel als een potentiaalstroming worden beschouwd.

Daar geldt voor druk en snelheid de wet van Bernoulli

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (4.18)$$

zodat, ook in de grenslaag geldt

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} \quad (4.19)$$

en de vergelijkingen voor de grenslaag ook geschreven kunnen worden als:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

2. De methode van Blasius-Howarth voor de integratie van de differentiaalvergelijkingen van de laminaire grenslaag doorontwikkeling in machtrekken.

Een eerste methode ter integratie van het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de laminaire grenslaag bij de twee dimensionale stromingen op een oppervlak is gegeven door Blasius [1] en later verbeterd en uitgewerkt door Howarth [3].

Laat de snelheid van de vrije stroming langs de buitenrand van de grenslaag gegeven zijn door een machtreeks, die in een zeker gebied, met inbegrip van haar afgeleide convergeert

$$U = u_1 x + u_2 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$$

waarin x de booglengte langs het oppervlak, gerekend vanaf het stuwpunt voorstelt.

Om het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

met de randvoorwaarden: $y = 0 \quad u = 0$
 $y = \infty \quad u = U$

(5.3)

te integreren, wordt een stroomfunctie ψ ingevoerd op grond van de tweede vergelijking, zodat

$$u = \frac{\psi}{y} \quad (5.4)$$

$$v = -\frac{\psi}{x} \quad (5.5)$$

terwijl de functie $\psi = 0$ langs de wand.

Voor ψ wordt nu verondersteld, dat zij te ontwikkelen is in een reeks naar x met coëfficiënten, die vooreerst nog onbekende functies zijn van y , en die in het beschouwde gebied, met inbegrip van haar afgeleiden convergent is.

$$\psi = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \quad (5.6)$$

Dan is

$$u = \frac{\psi}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{y} x^n \quad (5.7)$$

$$v = -\frac{\psi}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n-1} \quad (5.8)$$

Substitutie in de vergelijking (5.1) geeft dan door gelijkstellen van overeenkomstige coëfficiënten van x^n het volgende stelsel vergelijkingen

$$\sum_{m=1}^n \left\{ F_m' F_{n-m+1}' - F_m F_{n-m+1}'' \right\} = - \sum_{m=1}^n m u_{n-m+1} u_m + F_n'' \quad (5.9)$$

$n = 1, 2, \dots$

of

$$F_1'^2 - F_1 F_1'' = u_1^2 + F_1'' \quad (5.10)$$

$$F_n'' + n F_1 F_n'' - (n+1) F_1' F_n' + F_1'' F_n = - \sum_{m=1}^n m u_{n-m+1} u_m - \sum_{m=2}^{n-1} m \left\{ F_m' F_{n-m+1}' - F_m F_{n-m+1}'' \right\} \quad (5.11)$$

De randvoorwaarden zijn

$$y = 0, \quad F_n = F_n' = 0 \quad (5.12)$$

$$y = \infty, \quad F_n' = u_n$$

De eerste vergelijking is een niet-lineaire differentiaalvergelijking voor de functie F_1 , elke volgende is een lineaire diff. verg. van de 3de orde voor F_n , die opgelost kan worden als de voorgaande functies F_n gevonden zijn.

Door een geschikte transformatie worden deze vergelijkingen nu op een eenvoudige vorm gebracht. Men stelt

$$\eta = \sqrt{\frac{u_1}{y}} \cdot y \quad (5.13)$$

$$F_n = \sqrt{u_1} \cdot f_n, \quad f_n = \frac{u_n}{u_1} \quad (5.14)$$

De vergelijkingen worden dan

$$f_1'^2 - f_1 f_1'' = 1 + f_1'' \quad (5.15)$$

$$L_n(f) = f_n'' + n \cdot f_1' \cdot f_n' - (n+1) f_1'' \cdot f_n' + f_1'' \cdot f_n' = -n-1- \quad (5.16)$$

$$- \sum_{m=2}^{n-1} \left\{ 1 + f_1' \cdot f_{n-m+1}' - f_1'' \cdot f_{n-m+1}' \right\} \frac{u_n}{u_1} \frac{u_{n-m+1}}{u_1}, n \geq 2$$

met randvoorwaarden

$$n = 0 \quad f_n = f_{11} = 0 \quad (5.17)$$

$$n = \infty \quad f_n' = 1$$

waarin de accenten nu differentiaties naar η betekenen.

Verg. (5.15) is nu in een vorm gebracht, waardoor zij onafhankelijk is van de speciale snelheidsverdeling U in de vrije stroming, zodat de vergelijking (5.15) eens en voor el geïntegreerd kan worden. Het gelukt nu ook om de functies f_n samen te stellen als som van functies, waarvoor een dergelijke handelwijze gevolgd kan worden.

Daartoe worden de vergelijkingen uitgeschreven:

$$L_2(f) = f_2'' + 2 f_1' \cdot f_2' - 3 f_1'' \cdot f_2' + f_1'' \cdot f_2' = -3 \quad (5.18)$$

$$L_3(f_3) = -4 - 2(1 + f_2'^2 - f_2 f_2'') \frac{u_2^2}{u_1 u_3} \quad (5.19)$$

Stel vervolgens

$$f_3 = f_{3,0} + \frac{u_2^2}{u_1 u_3} \cdot f_{3,1} \quad (5.20)$$

dan worden de vergelijkingen voor deze functies

$$L_3(f_{3,0}) = -4 \quad (5.21)$$

$$L_3(f_{3,1}) = -2(1 + f_2'^2 - f_2 f_2'')$$

Substituerend in de volgende vergelijkingen kan men dit proces herhalen en telkens de optredende functie splitsen in de som van functies, die samengesteld worden uit functies, waarvoor de differentiaalvergelijking onafhankelijk is van de gegeven snelheidsverdeling.

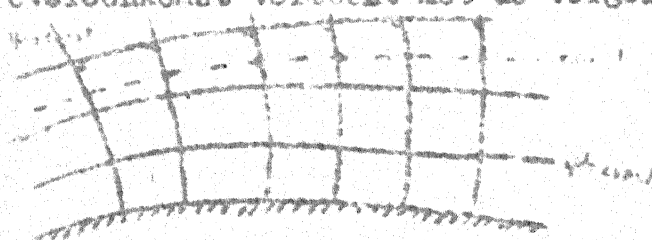
Howarth heeft een groot aantal van deze functies uitgerekend en getabelliseerd. Daar echter elke volgende functie met beklag van de voorgaande berekend moet worden, neemt de nauwkeurigheid op de duur af door de opeenhoping van fouten, zodat het aantal termen van de reeks beperkt is.

Verder bezit de methode het nadeel, dat men in het geheel niet weet of de veronderstelling, dat de reeks van w convergeert, bij een convergent veronderstelde reeks van U vervuld is.

Numerieke toepassingen doen vermoeden dat de convergentie, zo zij al aanwezig is, niet sterk is.

6 Het verband tussen de vergelijkingen voor de laminaire grenslaag en de vergelijking voor de warmtegeleiding.

Von Mises heeft reeds opgemerkt, dat de vergelijkingen voor de laminaire grenslaag ook geschreven kunnen worden in een vorm, die grote overeenkomst vertoont met de vergelijking voor de warmtegeleiding.



Daartoe worde de stroming iets nauwkeuriger beschouwd. Zoals voor de hand ligt, de wand een stroomlijn voor de stroming. In de potentiaalstroming buiten de grenslaag vormen de stroomlijnen en equipotentiaallijnen twee

...stelling orthogonale stroomlijnen.

Het is mogelijk om in deze stroming de potentiaal en de stroomfunctie als coördinaten in te voeren.

Ook de rand van de grenslaag is een stroomlijn. Als coördinaten van een punt in de grenslaag, naar de stroomfunctie blijft bestaan, worden nu ingevoerd de waarden van de stroomfunctie, tevens de waarden, die de potentiaalfunctie aanneemt in het punt van de rand van de grenslaag, gelegen op de normaal door het beschouwde punt in de grenslaag. De potentiaalfunctie bestaat in de grenslaag niet, wel echter de stroomfunctie, waarvan het bestaan immers door de continuïteitsvergelijking gewaarborgd is.

De determinant van Jacobi van deze transformatie is

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & 0 \\ -V & u \end{vmatrix} = Uu$$

De coördinaat ψ is, daar in de grenslaag $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ is, gelijk aan

$$\psi = \int_0^x U dx \quad (6.1)$$

Met deze coördinaten wordt de vergelijking (5.1) gebruik makend van de relaties

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -V \frac{\partial}{\partial \psi} + U \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = u \frac{\partial}{\partial \psi}$$

herleid tot

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right) = - \frac{u}{2U} \cdot \frac{\partial U^2}{\partial \psi} = - \frac{u}{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right) \quad (6.2)$$

Aangezien U onafhankelijk is van y en dus ook van ψ in de grenslaag, wordt nu de grootheid

$$\frac{U^2 - u^2}{2} = z \quad (6.3)$$

als nieuwe functie ingevoerd, dan kan deze vergelijking geschreven worden als

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = - \frac{u}{U} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} = - \frac{1}{1 - \frac{z}{U^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \quad (6.4)$$

De analogie met de vergelijking voor de warmtegeleiding is evident.

De randvoorwaarden voor het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen waren

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad u = v = 0 \\ y = \infty & \quad u = U \end{aligned}$$

De randvoorwaarden voor de functie z worden hieruit gevonden als:

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad z = \frac{U^2(z)}{2} \\ \psi = \infty & \quad z = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Deze randvoorwaarden kan nu een asymptotische uitdrukking voor z gevonden worden.

Daar voor $\psi \rightarrow \infty$ $z \rightarrow 0$ gaat, kan in dit getied de vergelijking vervangen door

$$\frac{dz}{d\psi} = \psi \cdot \frac{z^2}{2} \quad (6.6)$$

De oplossing van deze vergelijking met de gegeven randwaarden is direct te vinden:

$$z(\psi) = \frac{\psi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\psi} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{(\psi-\xi)^{3/2}} U^2(\xi) d\xi \quad (6.7)$$

Von Karman en Millikan [5] denken nu de gegeven functie $U^2(\psi)$ een polynoom in ψ benaderd:

$$U^2(\psi) = c_0 + c_1\psi + c_2\psi^2 + \dots \quad (6.8)$$

en substitueren dit resultaat in de formule: (6.7)

Voor de numerieke uitwerking wordt in de integraal eerst gesubstitueerd

$$\beta = \frac{\psi}{\sqrt{\pi}} \quad (6.9)$$

Uitwerken van de zo verkregen integraal levert dan voor $z(\psi)$ de uitdrukking:

$$z(\psi, \psi) = c_0 g_0\left(\frac{\psi}{\sqrt{\pi}}\right) + \sum_{r=1}^{\infty} c_r \psi^r \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r-1)!} \Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right) g_r\left(\frac{\psi}{\sqrt{\pi}}\right) \quad (6.10)$$

waarin de functies g op de volgende wijze gedefinieerd zijn:

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \int_x^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \quad (6.11)$$

$$g_r(x) = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)!} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + \frac{2x^2}{2r-1} g_{r-1}(x) \quad (6.12)$$

en met behulp van de bekende tabellen voor de waarschijnlijkheidsintegraal gemakkelijk getabelleerd kunnen worden.

Op deze wijze is het niet moeilijk en bij een gegeven snelheidsverdeling in de vrije stroming buiten de grenslaag de snelheidsverdeling in de grenslaag zelf uit te rekenen in een eerste benadering, die altans het asymptotische gedrag voor grote ψ , dus grote y goed weergeeft.

De poging van Von Karman en Millikan om nu ook verdere benaderingen hieruit af te leiden stuit op grote moeilijkheden.

Ook wordt in hun rapport een benadering gegeven voor de oplossing in de buurt van de wand. Daar in de latere literatuur op deze methode verder niet is ingegaan, wordt zij hier niet verder besproken.

2. Reeksontwikkelingen met het juiste asymptotische gedrag.

Hoewel de methode van Von Karman-Millikan in haar oorspronkelijke vorm niet gemakkelijk te gebruiken is, omdat in de diff. van z de

factor $\sqrt{1 - \frac{2z}{\psi}}$ voorkomt, blijkt wel, dat de door hen ingevoerde transformatie vergelijkingen levert, waarvan de oplossingen asymptotisch op de juiste manier benaderd kunnen worden. }

aanpak moet daarom een poging gewaagd om een compromis tot stand te brengen tussen de methode van Howarth, waarover het asymptotisch gedrag van de oplossingen vrijwel niets bekend is, en die van Von Karman-Hilliken. In dimensioneloze grootheden uitgedrukt worden dus de onafhankelijke variabelen in de vergelijkingen

$$\xi = \int_0^x \frac{U dx}{V_\infty L} = \frac{x}{V_\infty L} \quad (6.13)$$

en verder wordt nog een kleine vernadering ingevoerd doordat gesteld wordt:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2 \nu \int_0^x U dx}} = \frac{y}{\sqrt{2 \nu} \phi} \quad (6.14)$$

En plaats van $z = \frac{1}{2} (U^2 - u^2)$ wordt nu gesteld

$$\zeta = 1 - \frac{u}{U} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2z}{U^2}} \quad (6.15)$$

De vergelijking voor ζ wordt nu een niet-lineaire partiële diff. verg. van de 2e orde:

$$(1-\zeta) \left[(1-\zeta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^2 + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - 2 \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \zeta (2-\zeta) = 0 \quad (6.16)$$

met als randvoorwaarden

$$\zeta(\xi, 0) = 1 \quad \zeta(\xi, \infty) = 0 \quad (6.17)$$

Hierbij wordt de grootheid $\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \xi}$ in een machtsreeks naar ξ ontwikkeld

$$\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell} \xi^{\ell}$$

In het bijzonder kan voor $\xi = 0$ het begin profiel f_0/η bepaald worden uit de vergelijking:

$$(1-f_0) \left[(1-f_0) f_0'' - f_0'^2 + \eta f_0' \right] - \beta_0 f_0 (2-f_0) = 0 \quad (6.19)$$

met de randvoorwaarden

$$f_0(0) = 1, \quad f_0(\infty) = 0.$$

Deze vergelijking kan gemakkelijk herleid worden tot de eerste differentiaalvergelijking van Blasius, die door Howarth en later door Hartree meer in het bijzonder bestudeerd en getabellieerd is, al. door de substitutie

$$\eta = F_0(H) \quad H = \int_0^{\eta} \frac{dy}{1-f_0(y)} \quad (6.20)$$

waardoor zij overgaat in

$$F_0''' + F_0 F_0'' + \beta(1-F_0^2) = 0, \quad F_0(0) = F_0'(0) = F_0''(0) = 1. \quad (6.21)$$

Mengler denkt nu verder in aansluiting aan Howarth de functie ζ ook in een machtreeks naar ξ ontwikkeld

$$\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\eta) \xi^j \quad (6.22)$$

Door gelijkstellen van overeenkomstige coëfficiënten van ξ vindt hij dan een stelsel differentiaalvergelijkingen voor de functies f

$$\begin{aligned} (1-f_0) \left[(1-f_0) f_0'' + (\eta - 2f_0') f_0' \right] - 2(1-f_0) (\beta_0 - f_0' + f_0'') - f_0' (\eta - f_0') = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j-k} \left(2 f_k'' - \frac{k}{j} f_j f_{k-j}' \right) + (1-f_0) \sum_{k=1}^{\infty} (f_k f_{j-k}'' + f_k' f_{j-k}') - \\ - f_0' \sum_{k=1}^{\infty} f_k f_{j-k}' + \sum_{k=1}^{\infty} f_{j-k} \left[f_k'' + \eta f_k' - 2k f_k' - \sum_{j=0}^k (f_j f_{k-j}'' + f_j' f_{k-j}') \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

De randvoorwaarden zijn $f_0(0) = f_0(\infty) = 0$.

In het rechter lid komen slechts de functies $f_0, \dots, f_{j-1}$ voor, zodat de opvolgende functies f na elkaar berekend kunnen worden.

Ook hier kan men, evenals Howarth dat deed, de functies f_j splitsen in sommen van functies, die niet meer van de coëfficiënten β_k afhangen en dus eens en vooral berekend kunnen worden.

Het voordeel van deze methode boven die van Howarth wordt duidelijk als men het asymptotisch gedrag voor grote η van de functies onderzoekt. Dit wordt geleverd door de oplossingen van de vergelijking

$$f'' + \eta f' - 2(1-f)f = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j-k} f_k \quad (6.24)$$

In het bijzonder is voor $\xi = 0$ het asymptotisch gedrag bepaald door de oplossing van de vergelijking

$$f_0'' + \eta f_0' - 2 f_0 = 0 \quad (6.25)$$

Door te substitueren $f_0 = e^{-\frac{1}{4}\eta^2} u_0$ verkrijgt men voor u_0 de differentiaalvergelijking

$$u_0'' + \left(-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\eta^2\right) u_0 = 0 \quad (6.26)$$

gew. v. de vergelijking voor de functies van Weber (functies van de parabolische cylinder).

Hieruit volgt dan de asymptotische ontwikkeling (Whittaker-Watson blz. 347)

$$f_0 = e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \cdot \eta^{-3} \left\{ 1 - \frac{3(-4)}{2\eta^2} + \dots \right\} \quad (6.27)$$

Verder

aanvullend kan nu bewezen worden, dat de hoofdtterm in de asymptotische ontwikkeling van de oplossing van de homogene vergelijking, die uit (6.24) ontstaat, is

$$f_j = e^{-1/2\eta^2} \cdot \eta^{-(j+3)} \quad (6.28)$$

zodat de verhouding $\frac{1}{\eta^2}$ zich asymptotisch gedraagt als $(\frac{1}{2} + 1)$.

Hieruit volgt, dat voor grote waarden van η alleen de eerste term in de reeks een belangrijke bijdrage levert, zodat in dit gebied de reeks zeer goed bruikbaar is.

Bij de asymptotische ontwikkeling van de oplossingen van de diff. verg. van Howarth treedt dit niet op, zodat op grond van deze overwegingen de methode van Mangler inderdaad als een verbetering beschouwd kan worden.

Een nader onderzoek van deze methode is echter nog niet uitgevoerd. Mocht zij aan de door het asymptotische gedrag gewekte verwachtingen voldoen, dan is zij ongetwijfeld de beste van de tot op heden bekende berekeningsmethoden.

Een verder gaand onderzoek is dus alleszins aan te bevelen.

1. Methoden, die gebruik maken van integraalvoorwaarden.

Bij de praktische berekeningen van grenslaagstromingen, die nodig zijn ter berekening van de wrijvingsweerstand van vliegtuigvleugels wil men in het algemeen snel tot een resultaat komen, dat echter niet zeer nauwkeurig behoeft te zijn, daar de weerstand van het op de laminaire grenslaag volgende stuk turbulente grenslaag door de uitzonderlijke complicatie van de structuur dezer stroming toch niet te berekenen valt.

Men zal dus in de praktijk er de voorkeur aan geven grenslaagstromingen op een snelle, doch minder nauwkeurige wijze te berekenen.

Deze berekeningen worden geleverd door de z.g. integraalvoorwaarden, die voor het eerst door Von Karman [4] aangegeven zijn en door Pohlhausen praktisch toegepast zijn. (1921). [5]

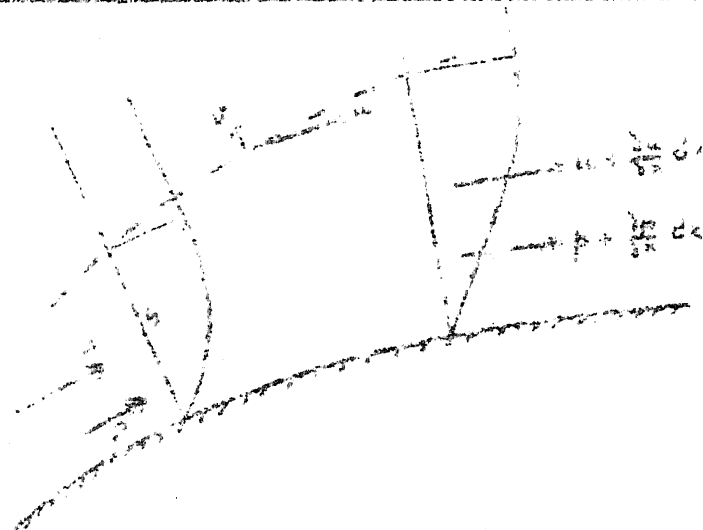
Sedertdien is de methode zeer vaak toegepast; door Howarth is zij in een meer bruikbare vorm gebracht en nog later heeft zij een vorm gekregen, die zeer snel en handelbaar is.

Het essentiële, dat aan al deze methoden gemeenschappelijk is, is dat voor het verloop van de snelheid in een doorsnede loodrecht op de wand een functie van een vastgelegde vorm wordt aangenomen, waarvan de coëfficiënten van zekere parameters afhangen, die met de plaats van de doorsnede veranderen.

Uit de grenslaagvergelijking worden dan vergelijkingen afgeleid, die de afhankelijkheid van de parameters van de coördinaat langs het oppervlak leveren.

Niet voor elk probleem is dezelfde aanname voor de snelheidsverdeling doeltreffend, er zijn uit de aard der zaak zeer vele mogelijkheden, die in verschillende gevallen verschillende resultaten geven. Als voorbeeld zij nu besproken, de methode van Karman-Pohlhausen en de direct hieruit afgeleide methoden.

De vergelijking voor het impuls transport.



Beschouw een stuk van de grenslaag, begrensd door de coördinatenlijnen

x en $x+dx$.

De hoeveelheid vloeistof, die per seconde door de doorsnede x getransporteerd wordt, wordt gegeven door de inte-

graal $\int_0^y \rho u \, dy$ en de impuls

door $\int_0^y \rho u^2 \, dy$

door de rechter doorsnede wordt naar buiten getransporteerd een hoeveelheid impuls van

$$\int_0^h \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \int_0^h \rho u^2 dy.$$

Verder wordt door de buitenrand van de grenslaag een vloeistofhoeveelheid $(\rho v)_h dx$ per seconde verwijderd, hetgeen een impulsverlies geeft van $(\rho Uv)_h dx$.

Op het linkerscheidingsvlak werkt een kracht in de X-richting

$$\int_0^h p dy$$

en op het rechter

$$\int_0^h p dy + \frac{d}{dx} \int_0^h p dy.$$

Verder werkt in het stuk langs de wand in de X-richting een kracht

$$\tau_0 dx$$

als τ_0 de schuifspanning langs de wand is.

Toepassing van de stelling, dat de toename van de impuls per seconde gelijk is aan de som van de werkende krachten geeft:

$$\frac{d}{dx} \int_0^h p dy dx - \tau_0 dx = \frac{d}{dx} \int_0^h \rho u^2 dx + (\rho Uv)_h dx.$$

Volgens de wet van Bernoulli is

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{du}{dx}.$$

Na uitwerken ontstaat de vergelijking, alsnog $v_h = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy$ gezet is

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (U^2 - u^2) dy - U \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (U - u) dy. \quad (7.1)$$

daar de differentiaalquotient naar de bovengrens weg blijken te vallen. Tenslotte deze vergelijking in eenvoudiger vorm te schrijven worden ingevoerd de grootheden:

$$\delta_1 = \int_0^h (1 - \frac{u}{U}) dy \quad (7.2)$$

de zogenaamde "verplaatsingsdikte" en:

$$\delta_2 = \int_0^h u(1 - \frac{u}{U}) dy \quad (7.3)$$

de "impulsverliesdikte".¹⁾

1) Door de viscositeit neemt de snelheid in de grenslaag af. Er wordt dus minder vloeistof door een doorsnede getransporteerd dan in het geval, dat er tot de wand potentiaalstroming was. De verplaatsingsdikte is de afstand waarover de wand verschoven moet worden om een potentiaalstroming te construeren, waarbij met dezelfde vrije stroming evenveel vloeistof door een doorsnede getransformeerd wordt als in de werkelijke stroming.

Analoog hieraan is de impulsverliesdikte de afstand waarover de wand verschoven moet worden, indien men een potentiaalstroming construeert, waarbij door een doorsnede evenveel impuls getransporteerd wordt als in de werkelijke stroming.

De vergelijking blijkt dan geschreven te kunnen worden als

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right). \quad (7.4)$$

Mathematisch kan deze vergelijking afgeleid worden uit de vergelijking van Prandtl door op te merken, dat, nu voor de oplossing als een functie van y een bepaalde veronderstelling is ingevoerd, het niet meer nodig is om deze laatste als differentiaalvergelijking voor y te beschouwen.

Daarom wordt zij geïntegreerd naar y tussen de grenzen 0 en h .

De oorspronkelijke vergelijking dient dan onvoorwaarden te stellen aan de te kiezen functie voor u voor $y = 0$.

Daar voor $y = 0$, $u = 0$ en $v = 0$ wordt de voorwaarde:

$$-U \frac{dU}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.5)$$

Andere voorwaarden voor de functie $\frac{u}{U} = f(y)$ worden gevonden door de grenslaagvergelijking te differentiëren, bv.:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right). \quad (7.6)$$

In plaats van y wordt gewoonlijk ingevoerd de dimensieloze grootte

$$\eta = \frac{y}{\delta},$$

waarbij δ een zekere lengte voorstelt, die van de beschouwde doorsnede afhangt en dus een functie van x kan zijn.

Het verloop van de snelheid in de x -richting wordt voorgesteld door een functie, waarvan de variatie met x eenvoudigheidshalve wordt weergegeven door parameter Λ een

$$\frac{u}{U} = f(\eta/\Lambda) \quad (7.7)$$

Voor Λ wordt meestal gekozen:

$$\Lambda = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = - \frac{U'}{\nu} \delta^2 = - \frac{U'}{U} \cdot R \cdot \frac{\delta^2}{L} = - \frac{U' + \delta^2}{\nu} \quad (7.8)$$

als R het getal van Reynolds voor de stroming is

$$R = \frac{UL}{\nu}$$

en L een zekere karakteristieke lengte, bv. de profielkoorde voorstelt.

Kiest men voor δ de dikte van de grenslaag, d.i. de waarde van y , waarbij $u(y) = U$ is, dan worden de uitdrukkingen voor de verschuivings- resp. de impulsverliesdikte:

$$\delta_1 = \delta \Delta_1 = \delta \int_0^{\infty} (1-f) d\eta. \quad (7.9)$$

$$\Delta_2 = 0 \quad \Delta_2 = 0 \quad \int_0^1 x(1-x) dx \quad (7.10)$$

$$\text{Verder is } \tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \cdot \frac{U}{\delta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (7.11)$$

Op deze wijze ontstaat dan de volgende differentiaalvergelijking voor Λ als functie van x :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \left(\frac{1}{2} \Delta_2 - \Lambda \frac{d\Delta_2}{d\Lambda} \right) \Lambda' \frac{U}{U'} - \frac{1}{2} \Lambda^2 \frac{UU''}{U'^2} - \Delta_2 \Lambda \left(2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \quad (7.12)$$

Pohlhausen heeft nu als verdeling f aangenomen een polynoom van de 4e orde, dat voldoet aan de randvoorwaarden:

$$\eta = 1 \quad f = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7.13)$$

$$\eta = 0 \quad f = 0.$$

Howarth heeft de in bovenstaande vergelijking optredende coëfficiënten

$\Lambda' \frac{U}{U'}$, $\frac{UU''}{U'^2}$ en de constante als functies van Λ getabelleerd.

Deze methode is in zeer veel gevallen gebruikt.

Met het oog op het optreden van de tweede afgeleide van U , die in de meeste gevallen door numerieke differentiatie gevonden moet worden, is het raadzaam de methode in iets andere vorm toe te passen.

Neem daartoe niet als eenheid in de y -richting de grootheid δ , maar δ_2 , zodat $y = \eta_2 \cdot \delta_2 = \eta \cdot \delta \cdot \Delta_2$.

$$\delta_1 = \Delta_{12} \delta_2$$

$$\text{waarbij } \Delta_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

In plaats van Λ voert men in

$$\Lambda_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \cdot U' = \Lambda \cdot \Delta_2^2 = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (7.15)$$

Na enige herleiding wordt dan de impulsvergelijking

$$U \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{U_1'} \right) = 2 \quad T_2 - 2(2 + \Delta_{12}) = H(2) \quad (7.16)$$

waarin

$$T_2 = \frac{c}{\rho U^2} \cdot \frac{U \delta_2}{\delta_2} = \left(\frac{f}{\eta_2} \right)_0 \quad (7.17)$$

Uit de aangenomen vorm voor f kan de functie H worden bepaald. De vergelijking kan nu gemakkelijk worden opgelost.

De methode Pohlhausen blijkt een zeer goede benadering te zijn in het gebied van afnemende druk. De snelheidsprofielen stemmen

goed overeen met de met meer exacte methoden berekende en met metingen. In het gebied van toenemende druk blijkt zij echter een slechte benadering te geven, in het bijzonder bij de bepaling van het punt, waar $T_0 = 0$, waar voorbij een terugstromen van de grenslaag vlak achter de wand ontstaat (hier wisselt $\frac{\partial u}{\partial y}$ van teken!). Dit punt is uitermate

belangrijk, want deze terugstroming is niet stabiel, er vormt zich een gebied van werveling achter dit punt waardoor de grenslaagstroming geheel ophoudt te bestaan; hier laat de grenslaag los en de weerstand wordt door het optreden van de wervels aanmerkelijk vergroot. Het is nu van belang dit punt enigermate nauwkeurig te bepalen. Daartoe zijn de in het eerste deel behandelde methoden beter geschikt. In het algemeen zal de stroming echter reeds voor het punt van loslaten instabiel worden als het getal van Reynolds maar groot genoeg is.

In dit geval wordt de grenslaag turbulent, zodat geheel andere wetten gelden.

Wel kan als vaststaand worden aangenomen, dat de turbulente grenslaag een grotere stabiliteit tegenover loslaten bezit.

Een exacte mathematische theorie van de turbulente grenslaag bestaat tot heden echter niet.

Hiermede is een overzicht gegeven over enkele op het ogenblik actuele methoden uit de theorie der laminaire grenslagen.

Veel is weggelaten o.a. de berekeningsmethoden, die gebaseerd zijn op de vervanging van de differentiaalvergelijking door differentie-vergelijkingen.

Ook de methode van Prandtl-Goldstein, die, uitgaande van een snelheidsprofiel, dat voor een bepaalde doorsnede geldt, het snelheidsprofiel in volgende doorsneden berekent, is niet behandeld.

Vele andere methoden, die in de literatuur te vinden zijn, hebben slechts nog historische betekenis of zijn slechts voor zeer speciale problemen geschikt.

Verder is het probleem van de stabiliteit van de laminaire stroming, tegen kleine storingen dat op het ogenblik als opgelost beschouwd kan worden, in verband met de grote omvang die het vertoont, niet behandeld.

Samenvatting.

Uit de vergelijkingen van Navier-Stokes voor de stroming van een visceuze vloeistof in algemene kromlijnige coördinaten worden in het speciale geval van tweedimensionale stroming langs een zwak gekromd oppervlak de grenslaagvergelijkingen van Prandtl afgeleid, die voor een vloeistof met geringe viscositeit gelden. In rechthoekige coördinaten x, y zijn zij:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$
(0.1)

Hierin ste U de snelheid in de vrije stroming buiten de grenslaag voor; u en v de snelheidscomponenten in de grenslaag en ν de viscositeit.

Van de verschillende methoden, die in de literatuur bekend zijn ter integratie van deze vergelijkingen worden enkele besproken, die allen alleen betrekking hebben op stationnaire laminaire stroming.

1 De methode van Blasius-Howarth.

De stroomfunctie ψ , bepaald door

$$u = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (0.2)$$

wordt ontwikkeld gedacht in een machtreeks naar x met coëfficiënten, die functies zijn voor y .

$$\psi = F_1(y) \cdot x + F_2(y) \cdot x^2 + \dots \quad (0.3)$$

Is U eveneens in een machtreeks naar x ontwikkeld,

$$U = u_1 x + u_2 x^2 + \dots \quad (0.4)$$

dan levert substitutie in de grenslaagvergelijkingen een stel differentiaalvergelijkingen voor de functies F_k van y , die achtereenvolgens opgelost worden.

2 De methode van Karman-Millikan.

Deze berust op de analogie van de vergelijkingen voor de laminaire grenslaag en de vergelijking voor de warmtegeleiding als men in de eerste als coördinaten in de grenslaag invoert de stroomfunctie ψ benevens de waarde van de potentiaalfunctie φ aan de rand van de grenslaag, dus in de vrije stroming.

De vergelijking voor het "energiedefect" $z = \frac{U^2 - u^2}{2}$ wordt dan:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \sqrt{1 - \frac{2z}{U^2}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \quad (0.5)$$

Met behulp van bovengenoemde analogie gelukt het Von Karman en Millikan een benaderde oplossing te geven, die het asymptotische gedrag van de functie z op grote afstand van de wand goed weergeeft.

Het vinden van betere benaderingen wordt echter zeer gecompliceerd omdat z in verg. (0.5) onder het wortelteken voorkomt.

3 De methode van Mangler.

Mangler heeft een unificatie beoogd van beide voorgaande methoden door als dimensieloze coördinaten weer in te voeren $\xi = \frac{x}{\sqrt{x_0 L}}$ en

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}}$$

maar in plaats van z in te voeren:

$$\zeta = 1 - \frac{u}{U} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2z}{U^2}}$$

Voor ζ neemt hij, analoog met Howarth een ontwikkeling aan van de vorm:

$$\zeta = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(\eta) \cdot \zeta^l$$

en de gegeven functie $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$, die in zijn vergelijking (6.16)

optreedt ontwikkelt hij ook in een reeks:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \zeta^l$$

Op deze wijze wordt voor de functies $f(\eta)$ een stel differentiaalvergelijkingen verkregen.

Deze functies geven volgens Mangler beter het asymptotisch gedrag der oplossingen weer dan die van Howarth. Hij heeft echter het gedrag in het eindige nog niet voldoende onderzocht.

4 De methode van Kármán-Fahlhausen.

Deze methode gaat uit van de vergelijking voor het impulstransport, door een doorsnede loodrecht op de wand, die door integratie uit de vergelijkingen van Prandtl wordt verkregen.

Met behulp van een reeks snelheidsprofielen van ongeschreven gedaante (vierdegraadskrommen) die van een parameter Λ afhangt vindt men een differentiaalvergelijking voor de afhankelijkheid van Λ van x , die numeriek opgelost kan worden, zodat de overige grootheden zoals de grenslaagdikte en de schuifspanning langs de wand bepaald kunnen worden.

Hoewel de methode onnauwkeurig is vooral in een gebied, waar de druk toeneemt, wordt zij in de praktijk veel gebruikt omdat zij snel resultaten levert.

Literatuur.

- 1 H. Blasius Zeitschrift für Mathematik und Physik 56 (1908) 4-13
- 2 S. Goldstein Modern Development in Fluid Dynamics. I, II Oxford, 1938
- 3 L. Howarth A.R.C. Report en Memoranda 1632 (1935)
- 4 Th. von Kármán Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
1, 1921, blz. 235
- 5 Th. von Kármán-C.B. Millikan N.A.C.A. Report 504, 1934
- 6 T. Levi-Civita Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik. Aachen 1929,
blz. 30.
- 7 R. von Mises Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.
1, 1927, blz. 425
- 8 H. Pohlhausen Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
1, 1921, blz. 252
- 9 L. Prandtl Verhandlungen des dritten internationalen Mathematischen
Kongresses, Heidelberg 1904.